

Ejercicios de Cálculo Matricial

1. Efectúe los siguientes productos matriciales:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{Solución: } \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 13 & -11 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{Solución: } \begin{pmatrix} -10 & 23 & 13 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \quad \text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 8 & -8 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\text{d) } (1 \ 2 \ 1 \ 1)_{1 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 2} \quad \text{Solución: } (10 \ 0)_{1 \times 2}$$

2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, compruebe que no se cumple la propiedad conmutativa, es decir que $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\text{Solución: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 26 & -20 & 10 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 24 & -15 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

3. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calcule:

a) $A \cdot B \cdot C$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $A^t \cdot B^t \cdot C^t$

Solución:

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

c) $2A + B + 3C$

Solución:

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$$

d) $C^t \cdot B^t \cdot A^t$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e) $2C^t \cdot 4A^t \cdot 3B^t$

Solución:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 408 & -480 \\ 384 & -480 \end{pmatrix}$$

4. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $A^2 - 2A - I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $|A| = -5$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ Solución: $|B| = 15$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Solución: $|C| = -6$

d) $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Solución: $|D| = 4$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $|E| = 6$

f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Solución: $|F| = 6$

6. Calcule la inversa, si es posible, de las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ Solución: no tiene

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ Solución: $C^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -24 & -32 & 8 \\ 12 & 14 & -3 \\ 20 & 26 & -5 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ Solución: $D^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \\ -8 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

$$e) E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } E^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Calcule para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 2-a & a \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } |A| = (2-a)2a - a - 2a(1-a) = 4a - 2a^2 - a - 2a + 2a^2 = a = 0$$

luego: para $a \neq 0$ tiene inversa.

8. Calcule el valor de a para que las siguientes matrices sean invertible.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } a \neq 1$$

$$b) B = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } a \neq 1, -1$$

9. Averigüe el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } rg(A) = 2$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } rg(B) = 1$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Solución: } rg(C) = 3$$

10. Calcule el rango de las siguientes matrices, según los valores de a :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } |A| = -6 + 4a - 6 + 4a = 8a - 12 = 0; \quad a = \frac{12}{8}$$

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2, & a = \frac{12}{8} \\ 3, & a \neq \frac{12}{8} \end{cases}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } \text{rg}(B) = \begin{cases} 2, & a \neq 4 \\ 1, & a = 4 \end{cases}$$

11. Utilizando las propiedades correspondientes, y suponiendo que las siguientes matrices son regulares, resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\text{a) } AXB = C^T B^{-1}$$

Solución:

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}C^T B^{-1}B^{-1}; \quad X = A^{-1}C^T B^{-1}B^{-1}$$

$$\text{b) } AX + BX = C$$

Solución:

$$(A + B)X = C; \quad (A + B)^{-1}(A + B)X = (A + B)^{-1}C; \quad X = (A + B)^{-1}C$$

$$\text{c) } X^{-1}A = B$$

Solución:

$$XX^{-1}A = XB; \quad A = XB; \quad AB^{-1} = XBB^{-1}; \quad X = AB^{-1}$$

$$\text{d) } AX + X = B + C$$

Solución:

$$(A + I)X = B + C; \quad (A + I)^{-1}(A + I)X = (A + I)^{-1}(B + C); \quad X = (A + I)^{-1}(B + C)$$